

$$a) \cos 2x + \cos x + 1 = 0$$

$$b) 5 \cos^2 x = 9 - 9 \sin x$$

$$c) \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$d) 3 \cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = 1$$

Resolución

$$a) \cos 2x + \cos x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

Expresando las funciones trig. con el mismo ángulo

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1 = 0$$

Expresando la ec. en término de una sola función

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0$$

Resolviendo la ec. por factorización

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\text{soluciones principales: } x_1 = \frac{\pi}{2} ; x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Utilizando las fórmulas de reducción obtenemos las soluciones en el intervalo fundamental (valor auxiliar $\pi/3$)

$$\text{soluciones principales: } x_3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_4 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$S = \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Nota: Se ha denominado solución principal a las que pertenecen al intervalo fundamental $0 \leq x \leq 2\pi$

$$b) 5 \cos^2 x = 9 - 9 \sin x$$

Como las funciones trigonométricas tienen el mismo ángulo, la expresamos en término de una sola función

$$5(1 - \sin^2 x) = 9 - 9 \sin x$$

$$5 - 5 \sin^2 x = 9 - 9 \sin x$$

$$5 \sin^2 x - 9 \sin x + 4 = 0$$

$$(5 \sin x - 4)(\sin x - 1) = 0$$

$$5 \sin x - 4 = 0$$

$$\sin x = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{las soluciones principales son:}$$

$$x_1 = 53,1^\circ \quad x_2 = 126,9^\circ$$

$$\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1 \quad \text{la solución principal es: } x_3 = 90^\circ$$

$$S = \left\{ 53,1^\circ + 360^\circ k ; 126,9^\circ + 360^\circ k ; 90^\circ + 360^\circ k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \sqrt{2} - \cos x$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para utilizar las identidades, esta elevación puede introducir raíces extrañas.

$$\sin^2 x = (\sqrt{2} - \cos x)^2$$

$$1 - \cos^2 x = 2 - 2\sqrt{2} \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2\sqrt{2} \cos x + 1 = 0 \quad \text{Trinomio cuadrado perfecto}$$

$$(\sqrt{2} \cos x - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones principales son:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} ; \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Comprobación

$$\text{para } x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{MI: } \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{MD: } \sqrt{2}$$

$$\text{MI} = \text{MD}$$

$$\text{para } x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{MI: } \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\text{MD: } \sqrt{2} \quad \text{MI} \neq \text{MD}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$d) 3 \cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = 1$$

$$\frac{3 \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 1$$

Multiplicando por $\sin^2 x$ para eliminar denominadores (esta eliminación de denominadores puede introducir raíces extrañas)

$$3 \cos^2 x - 1 = \sin^2 x$$

$$3 \cos^2 x - 1 = 1 - \cos^2 x$$

$$4 \cos^2 x = 2$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones principales son:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} ; x_2 = \frac{3\pi}{4} ; x_3 = \frac{5\pi}{4} ; x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

Como los valores de x encontrados no anulan el factor por el que hemos multiplicado la ecuación ($\sin^2 x$), entonces todos estos valores son solución.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observa que en los incisos c y d del ejemplo anterior al elevar al cuadrado o eliminar denominadores se pueden introducir raíces extrañas, por lo que debes de comprobar de alguna forma las soluciones.

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Calcula $\sin 2x$, $\cos 2x$ y $\tan 2x$ si:

a) $\sin x = \frac{3}{4} ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ b) $\cos x = \frac{2}{3} ; \sin x < 0$

c) $\tan x = 2 ; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$ d) $\sin x = \frac{1}{2} ; \cos x < 0$

e) $\cos x = -\frac{1}{3} ; \tan x > 0$ f) $\tan x = 1,5 ; 0 < x < \pi$

2. Demuestra las siguientes identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

b) $\cot^2 x = \cos^2 x + (\cot x \cos x)^2$

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

d) $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x$

e) $\cos 2\beta = \cos^4 \beta - \sin^4 \beta$

f) $\cos (60^\circ + \alpha) = \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2}$

g) $\sin (x + 45^\circ) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$

h) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \tan \alpha$

i) $\frac{\cos 2\gamma + \sin^2 \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} = \cot^2 \gamma$

j) $3(1 - 2 \sin^2 \theta) = 3 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right)$

$$k) \frac{1}{2} \sin 2x \cot x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$l) \frac{\sin 2x}{2 - 2 \sin^2 x} + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$m) 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 + \sin 2\alpha$$

$$n) \cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$ñ) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$o) \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan x}{1 - \sin x} = \cos x$$

$$p) \frac{\tan^2 x + 1}{2 \cos(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos^3 x}$$

3. Sean las funciones f y g . Demuestra que para todo valor admisible de la variable, se verifica que $f(x) = g(x)$.

$$a) f(x) = \sin 2x ; g(x) = \frac{-2 \cos(\pi - x) - 2 \cos^3 x}{\sin x}$$

$$b) f(x) = \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2x - \sin^4 x}{1 - \cos^2 x} ; g(x) = \cos 2x$$

$$c) f(x) = \frac{2}{\sin 2x} - \tan x ; g(x) = \frac{2 \cos^2 x}{\sin 2x}$$

$$d) f(x) = \sin 2x \cos x + 2 \sin^3 x ; g(x) = 2 \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$e) f(x) = \cos 2x ; g(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$f) f(x) = \cot x ; g(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$g) f(x) = \sin 3x ; g(x) = 4 \sin x \sin(60^\circ + x) \sin(60^\circ - x)$$

$$h) f(x) = 2 \tan x - \sin 2x ; g(x) = \frac{2 \sin^2 x}{\cot x}$$

$$i) f(x) = \tan 3x ; g(x) = \tan x \tan(60^\circ + x) \tan(60^\circ - x)$$

4. Prueba que:

$$a) \sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$b) \frac{2 \sin x \cos(2\pi - x) - 2 \sin x \cos^3 x}{\sin 2x \cos^2 x} = \tan^2 x \quad (x \neq \frac{k\pi}{2})$$

$$c) \frac{2 \sin \beta - 2 \sin^3 \beta}{\cos \beta} + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \sin 2\beta + \cos 2\beta$$

$$(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad & \frac{\sin(\pi - \beta)}{1 + \cos \beta} - \cot(\pi - \beta) = \frac{1}{\sin \beta} \quad (\beta \neq k\pi) \\
 e) \quad & (1 - 2 \sin^2 x)(1 + \cot^2 x) = \cot^2 x - 1 \quad (x \neq k\pi) \\
 f) \quad & \frac{\cos 2x + \sin 2x \cot x}{1 - \sin^2 x} = 3 - \tan^2 x \\
 g) \quad & \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = \sin 5x \\
 h) \quad & \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \sin 2\theta (1 + 2 \cos \theta) \\
 i) \quad & \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}) \\
 j) \quad & \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}) \\
 k) \quad & \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} = \frac{2 - \sin 2x}{2} \quad (x \neq (4k-1)\frac{\pi}{4}) \\
 l) \quad & \frac{\sin 3\beta - \sin \beta}{\cos \beta - \cos 3\beta} = \cot 2\beta \quad (\beta \neq k\frac{\pi}{2})
 \end{aligned}$$

5. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & 2 \cos^2 x + \sin x = 2 & b) \quad & 6 \cos x + 4 \sin^2 x = 2 \\
 c) \quad & 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 & d) \quad & \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0 \\
 e) \quad & \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0 & f) \quad & 3 \cos^2 \beta + \sqrt{3} \sin \beta = -1 \\
 g) \quad & (1 + \cos x) \left(\frac{1}{\sin x} - 1 \right) = 0 \\
 h) \quad & (4 \cos^2 \theta - 3) \left(\frac{1}{\sin \theta} + 2 \right) = 0 \\
 i) \quad & 4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3 & j) \quad & 3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x \\
 k) \quad & \cos 2x + \cos x = -1 & l) \quad & \cos 2x = \cos^2 x \\
 m) \quad & \sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = 0 \\
 n) \quad & 2 \sin y = \sin 2y & ñ) \quad & \sin x = \frac{3}{4} \cos x \\
 o) \quad & \sin^2 2x = \cos^2 2x & p) \quad & 2 \sin^2 2x = \cos^2 2x \\
 q) \quad & \sqrt{5 - 2 \sin x} = 6 \sin x - 1 \\
 r) \quad & \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0
 \end{aligned}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$a) 3 \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$b) 2\sqrt{3} \cos^2 x = \sin x$$

$$c) 3(1 + \cos x) = \sin 2x \tan x$$

$$d) \cos 2x + 5 \cos x = 2$$

$$e) \cos 2x + 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 5 \sin x - 2$$

$$f) \sin^2 2x - \sin 2x = 2$$

$$g) (2 \sin x \cos x)^2 + 5 \sin 2x = 7 - \sin 2x$$

$$h) 2 \cot x \sin x + \cot x = 0$$

$$i) \tan^2 \frac{x}{2} - 3 = 2 \tan \frac{x}{2}$$

$$j) \sin (30^\circ + x) - \cos (60^\circ + x) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$k) \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$$

$$l) \frac{\sin 2x}{\cos x} + 1 = \cos^2 x$$

$$m) \cot^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = 3$$

$$n) \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x = 3$$

$$ñ) \frac{2}{\sin^2 x} - \cot x = 5$$

$$o) \sqrt{2 + 4 \cos x} = \frac{1}{2} + 3 \cos x$$

$$p) \sqrt{3 + 2 \tan x - \tan^2 x} = \frac{1 + 3 \tan x}{2}$$

$$q) \frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$$

7. Determina los puntos de intersección de los gráficos de las funciones:

$$a) f(x) = 2 \sin^2 x ; g(x) = 0,5$$

$$b) f(x) = 3 \tan^2 x ; g(x) = 1$$

$$c) f(x) = \tan^2 x ; g(x) = 1 - 2 \tan x$$

$$d) f(x) = 6 \cos^2 x ; g(x) = 5 \sin x$$

$$e) f(x) = 2(2 \cos^2 x - 1) ; g(x) = 2 \sin x$$

$$f) f(x) = \cos 2x + 2 ; g(x) = \cos x$$

- g) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$; $g(x) = 3 \tan^2 x$
 h) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cot x$
 i) $f(x) = \tan x$; $g(x) = \cos x$
 j) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$
 k) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos \frac{x}{2}$
 l) $f(x) = 5 \sin x - 2$; $g(x) = \cos 2x + 3 \sin^2 x - \cos^2 x$
 m) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$; $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x$
 n) $f(x) = \tan^3 x + \tan^2 x$; $g(x) = 3 + 3 \tan x$.

8. Halla los ceros de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 3 \cos^2 x + 9 \cos x - 12$
 b) $g(x) = \tan^2 x - \frac{9}{2} \tan x - 1$
 c) $g(x) = 2 \cos^2 x + \sin x - 2$
 d) $p(x) = 4 \sin x - \sin 2x$
 e) $q(x) = \cos 2x + 5 \cos x - 2$
 f) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$
 g) $g(x) = \cos^2 x - 4 \sin x + 5 \sin^2 x$
 h) $p(x) = 4 \cos 2x + 3 \cos x - 1$
 i) $q(x) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x$
 j) $f(x) = \cos 2x + 2(3 \cos^2 x + \cos x)$
 k) $p(x) = \sin 2x + 3 \cos x$
 l) $f(x) = 2 \sin^3 x - \cos 2x - \sin x$

9. Demuestra que si $f(x) = \sin^2 x$; $g(x) = \cos^2 x$;

$h(x) = \tan x$ (punto 17 del Memento).

- a) $f'(x) + g'(x) = 0$
 b) $f'(x) - g'(x) = 2 \sin 2x$
 c) $h'(x) \cdot f(x) = \tan^2 x$
 d) $f'(x) \cdot g'(x) + 4 \sin^2 x = 4 \sin^4 x$
 e) $h'(x) - g(x) = h^2(x) + f(x)$

7. Repaso de propiedades geométricas elementales

Pares de ángulos

- En dos rectas que se cortan se forman pares de ángulos adyacentes y pares de ángulos opuestos por el vértice (fig. 21).

Los ángulos adyacentes suman 180° y los opuestos por el vértice son iguales. Por ejemplo, en la figura 21 α y β son adyacentes y α y γ opuestos por el vértice.

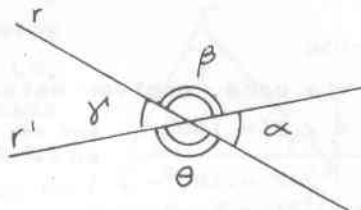


Fig. 21

- En dos rectas paralelas cortadas por una secante se forman pares de ángulos correspondientes, alternos y conjugados (fig. 22).

Los correspondientes y los alternos son iguales. Los conjugados suman 180° .

Por ejemplo en la figura 22 el $\angle 1$ es correspondiente con el $\angle 2$, alterno con el $\angle 4$ y conjugado con el $\angle 3$.

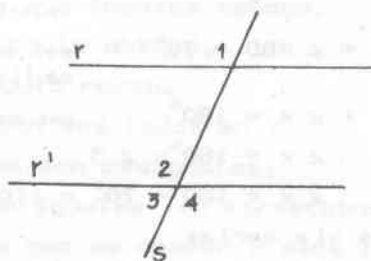


Fig. 22

En general puede concluirse que si dos rectas paralelas son cortadas por una secante se cumple:

- Si la secante es perpendicular a las paralelas todos los ángulos que se forman son iguales.
- Si la secante no es perpendicular a las paralelas
 - todos los ángulos agudos (obtusos) que se forman son iguales.
 - los pares de ángulos formados por uno agudo y uno obtuso suman 180° .

Ejemplo 1

Si $AB \parallel CD$ (fig. 23)

$$\angle 1 = 40^\circ$$

BD: bisectriz del $\angle ABC$.

Halla: $\angle x$

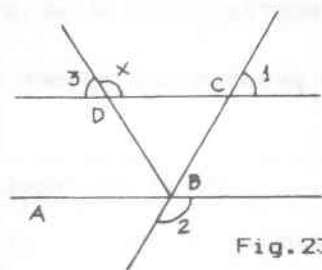


Fig. 23

Resolución

Una vía para resolver este ejercicio es:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \text{por ser conjugados entre } AB \parallel CD \text{ y } BC \text{ secante}$$

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$$

$$\angle 2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\angle ABC = \angle 2 = 140^\circ \quad \text{por opuestos por el vértice.}$$

$$\angle ABD = \frac{\angle ABC}{2} = 70^\circ \quad \text{por ser BD bisectriz del } \angle ABC. \text{ (punto 21 del Memento)}$$

$$\angle 3 = \angle ABD = 70^\circ \quad \text{por ser correspondientes entre } AB \parallel CD \text{ y BD secante.}$$

$$\angle 3 + \angle x = 180^\circ \quad \text{por adyacentes.}$$

$$\angle x = 180^\circ - \angle 3$$

$$\angle x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Otra vía sería:

$$\angle x = \angle BCD + \angle DBC \quad (1) \quad \text{por ángulo exterior al } \triangle BCD.$$

Calculemos los ángulos BCD y DBC

$$\angle BCD = \angle 1 = 40^\circ \quad \text{por ángulos opuestos por el vértice}$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \text{por ser conjugados entre } CD \parallel AB \text{ y CB secante}$$

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$$

$$\angle 2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\angle ABC = \angle 2 = 140^\circ \quad \text{por opuestos por el vértice.}$$

$$\angle DBC = \frac{\angle ABC}{2} = 70^\circ \quad \text{por ser BD bisectriz del } \angle ABC.$$

Sustituyendo $\angle DBC$ y $\angle BCD$ en (1) se tiene:

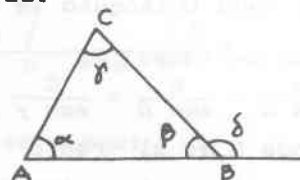
$$\angle x = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$$

Observa que en el ejemplo anterior se ha utilizado una propiedad de los ángulos en el triángulo, la de los ángulos exteriores, que se incluye en el resumen que aparece a continuación.

TRIÁNGULOS

- En todo triángulo se cumple que cada lado es menor que la suma de los otros dos y menor que su diferencia (desigualdad triangular) y a lados (ángulos) iguales se oponen ángulos (lados) iguales.

- En un triángulo hay ángulos interiores y exteriores. Los interiores suman 180° y cada exterior es adyacente con un interior e igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él (fig. 24)



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (INTERIORES)}$$

$$\delta = \alpha + \gamma \text{ (EXTERIOR)}$$

Fig. 24

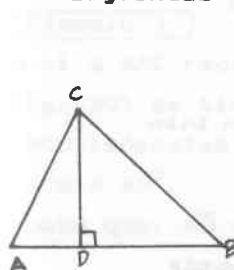
- Los triángulos según sus ángulos se clasifican en:

- *acutángulo*: tiene todos sus ángulos agudos,
- *obtusángulo*: tiene un ángulo obtuso,
- *rectángulo*: tiene un ángulo recto,

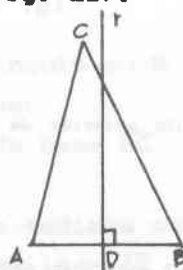
también se clasifican según sus lados en:

- *escaleno*: sus tres lados son desiguales,
- *isósceles*: dos lados son iguales (en consecuencia los ángulos que se oponen a esos lados son iguales),
- *equilátero*: sus tres lados son iguales (en consecuencia sus tres ángulos son iguales y con una de amplitud de 60°).

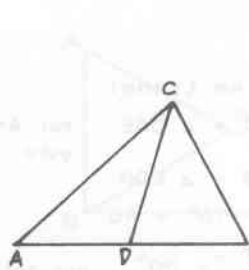
- En todo triángulo se pueden trazar las rectas notables siguientes (fig. 25):



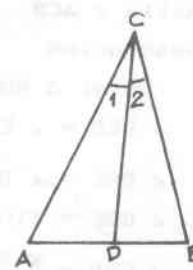
$\overline{CD}$ ALTURA SOBRE
 $\overline{AB}$
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



r: MEDIATRIZ DE
 $\overline{AB}$
 $r \perp \overline{AB}$
 $\overline{AD} = \overline{DB}$



$\overline{CD}$: MEDIANA SOBRE
 $\overline{AB}$
 $\overline{AD} = \overline{DB}$



$\overline{CD}$: BISECTRIZ DEL
 $\angle ACB$
 $\angle 1 = \angle 2$

Fig. 25